1 HATA ANALİZİ

1.1 Bağıl Hata(Absolute Error)

Not 1

Mutlak Hata $= \varepsilon = |y_T - y_A|$

Bağıl Hata $= \varepsilon_t = \dfrac{|y_T - y_A|}{y_T}$

***Örnek* 1** $y_T = \pi = 3.141\,592654\ldots$ *ve* $y_A = \dfrac{22}{7} = 3.142\,857143$

y_A *daki hata*

$\varepsilon = |y_T - y_A| = |3.141\,592654 - 3.142\,857143| = |-0.00126| = |-1.264\,5 \times 10^{-3}|$

y_A *daki Bağıl hata*

$\varepsilon_T = \frac{y_T - y_A}{y_T} = \frac{0.00126}{3.141\,592654} = 0.000407 = 4.010\,7 \times 10^{-4}$

1.2 Yaklaşım Hatası(Relative Error)

Not 2 *Yaklaşım Hatası*

$$\varepsilon_a = \frac{y_{yeni} - y_{eski}}{y_{yeni}}$$

***Örnek* 2** $\cosh x$ *fonksiyonunun seri açılmı*

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$

olduğuna göre 0.2 için bağıl hata ve yaklaşım hatasını hesaplayınız.

***Çözüm*:** $\cosh 1 = 1.543\,08$ olduğu bilindiğine göre
Bir terim alındığında $\cosh x = 1$
İki terim alındığında $\cosh x = 1.5$
Bu hesaplamadaki bağıl hata ve yaklaşım hatası
$\varepsilon_t = \frac{\cosh 1 - 1.5}{\cosh 1} = 0.02791$ yani %2
$\varepsilon_a = \dfrac{y_{yeni} - y_{eski}}{y_{yeni}} = \dfrac{1.5 - 1}{1.5} = 0.333\,333$ yani %33
Terim sayılarını arttırarak devam edersek,

Terim Sayısı	Sonuç($\cosh 1$)	$\varepsilon_t(\%)$	$\varepsilon_a(\%)$
1	1	35.1	$-$
2	1.5	2.7	33.3
3	1.541666667	0.09	2.7
4	1.543080357	0.0018	0.0009

1.3 Kesme Hatası(Trancation Error)

***Örnek* 3** *$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Taylor seri açılımından yararlanarak $x = \frac{\pi}{3}$ için alacağı değeri $x = \frac{\pi}{4}$ değerini kullanarak hesaplayınız.*

***Çözüm*:** Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için Taylor serisi

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + R_n$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x_i = \frac{\pi}{4}$, $x_{i+1} = \frac{\pi}{3}$ alınacak olursa adım aralığı,,

$$h = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

olur. Fonksiyonun $x = \frac{\pi}{3}$ deki gerçek değeri ise
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$
olarak bulunur. Taylor serisi yardımıyla ise

- $n = 0$ için

  $$f(x_{i+1}) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707\,107\,, \qquad \varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.707\,107}{0.5} = -0.414\,214$$

- $n = 1$ için

  $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.521\,987\,, \qquad \varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.521\,987}{0.5} = -0.043\,974$$

- $n = 2$ için

  $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(\pi/12)^2}{2!}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.497\,754$$

  $$\varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.497\,754}{0.5} = 0.004\,492$$

- $n = 3$ için

  $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(\pi/12)^2}{2!}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(\pi/12)^3}{3!}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.499\,869$$

  $$\varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.499\,869}{0.5} = 2.62 \times 10^{-4}$$

2 CEBİRSEL DENKLEMLER

2.1 Aralık Yarılama Yöntemi

Örnek 4 *$f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 3 = 0$ denkleminin $-1 < x < 0$ aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü **aralık yarılama yöntemiyle** $\varepsilon = 0.06$ hata ile hesaplayınız.*

Çözüm: $x_L = -1 \qquad x_U = 0$ ve
$f(x_L) = f(-1) = -2 \qquad f(x_U) = f(0) = 3$ Buradan,
$f(x_L)\, f(x_U) < 0$ olduğundan $-1 < x_k < 0$ olacak şekilde bir kök vardır.

- $x_k = \dfrac{x_L + x_U}{2} = \dfrac{-1+0}{2} = -0.5, \qquad f(x_k) = f(-0.5) = 0.375 \Rightarrow x_L = -1, \qquad x_U = x_k = -0.5$

  $f(-0.5) = 0.375 \qquad f(-1) = -2.0$

  $|x_k - x_L| = |-1 + 0.5| = 0.5 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-1 - 0.5}{2} = -0.75 \qquad f(x_k) = f(-0.75) = -0.796\,88 \Rightarrow x_L = x_k = -0.75, \qquad x_U = -0.5$

  $f(-0.75) = -0.796\,875 \qquad f(-0.5) = 0.375$

  $|-0.5 + 0.75| = 0.25 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.75 - 0.5}{2} = -0.625 \qquad f(x_k) = f(-0.625) = -0.212\,89 \Rightarrow x_L = x_k = -0.625, \qquad x_U = -0.5$

  $f(-0.625) = -0.212\,891 \qquad f(-0.5) = 0.375$

  $|-0.625 + 0.5| = 0.125 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.625 - 0.5}{2} = -0.562\,5 \qquad f(x_k) = f(-0.5625) = 0.0798 \Rightarrow x_L = -0.625, \qquad x_U = x_k = -0.5625$

  $f(-0.625) = -0.212\,891 \qquad f(-0.5625) = 0.07\,983\,40$

  $|-0.625 + 0.5625| = 0.062\,5 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

- $x_k = \dfrac{-0.625 - 0.5625}{2} = -0.593\,75 \qquad f(x_k) = f(-0.59375) = -0.0667 \Rightarrow x_L = -0.59375, \qquad x_U = x_k = -0.5625$

  $f(-0.59375) = -0.06674\,19 \qquad f(-0.5625) = 0.07\,983\,40$

  $|-0.59375 + 0.5625| = 0.031\,25 < \varepsilon$ olduğundan verilen denklemin yaklaşık kökü $\varepsilon = 0.05$ hata ile $x_k = -0.59375$ dir.

x	$f(x)$
-1	-2
0	3
-0.5	0.375
-0.75	$-0.796\,88$
-0.625	$-0.212\,89$
-0.5625	0.0798
-0.59375	-0.0667

***Örnek* 5** *$f(x) = \exp(x) - x - 2 = 0$ denkleminin $1 < x < 1.8$ aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü **aralık yarılama yöntemiyle** $\varepsilon = 0.06$ hata ile hesaplayınız.*

***Çözüm*:** $f(1) = -0.281\,718\,172 \qquad f(1.8) = 2.\,249\,647\,46$
$f(1)f(1.8) < 0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $1 < x < 1.8$ aralığında bir kökü vardır.

- $x_k = \dfrac{1+1.8}{2} = 1.\,4 \qquad f(1.4) = 0.655\,199\,967 \Rightarrow x_L = 1, \qquad x_U = x_k = 1.4$
  $f(1) = -0.281\,718\,172 \qquad f(1.4) = 0.655\,199\,967$
  $|x_k - x_L| = |1.4 - 1| = 0.4 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.
- $x_k = \dfrac{1+1.4}{2} = 1.\,2 \qquad f(1.2) = 0.120\,116\,923 \Rightarrow x_L = 1, \qquad x_U = x_k = 1.2$
  $f(1) = -0.281\,718\,172 \qquad f(1.2) = 0.120\,116\,923$
  $|x_k - x_L| = |1.2 - 1| = 0.2 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.
- $x_k = \dfrac{1+1.2}{2} = 1.\,1 \qquad f(1.1) = -0.09583\,39761 \Rightarrow x_L = x_k = 1.1, \qquad x_U = 1.2$
  $f(1.1) = -0.09583\,39761 \qquad f(1.2) = 0.120\,116\,923$
  $|x_k - x_L| = |1.2 - 1.1| = 0.1 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.
- $x_k = \dfrac{1.2+1.1}{2} = 1.\,15 \qquad f(1.15) = 0.00819290969 \Rightarrow x_L = 1.1, \qquad x_U = x_k = 1.15$
  $f(1.1) = -0.09583\,39761 \qquad f(1.15) = 0.00819290969$
  $|x_k - x_L| = |1.1 - 1.15| = 0.05 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.
- $x_k = \dfrac{1.1+1.15}{2} = 1.\,125 \qquad f(1.125) = -0.0447831511 \Rightarrow x_L = x_k = 1.125, \qquad x_U = 1.15$
  $f(1.125) = -0.0447831511 \qquad f(1.15) = 0.00819290969$
  $|x_k - x_L| = |1.125 - 1.15| = 0.025 < \varepsilon = 0.06$ olduğundan

verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 1.125$ tir.

2.2 Kiriş Yöntemi(Secant Yöntemi)

Not 3 *Kiriş yöntemi*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} y_i$$

Örnek* 6** $f(x) = e^{-x} - x = 0$ *denkleminin köklerini* $(0,1)$ *aralığında* ***Kiriş Yöntemi *ile hesaplayınız.*

***Çözüm*:** $f(0) = 1.0 \qquad f(1) = -0.632\,120\,559 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$ olduğundan bu aralıkta bir kök vardır.

$x_0 = 0, \qquad y_0 = f(x_0) = 1$

$x_1 = 1 \qquad y_1 = f(x_1) = -0.632\,120\,559$

- $x_2 = x_1 - \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1 = 1 - \dfrac{1-0}{-0.632120559 - 1}(-0.632120559) = 0.612\,699$,
  $f(0.612\,699) = y_2 = -0.07\,081\,27$
- $x_3 = x_2 - \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = 0.612\,699 - \dfrac{(0.612\,699 - 1)}{(-0.07\,081\,27 + 0.632\,120\,)}(-0.07\,081\,27) = 0.563\,838$
  $f(0.563\,838\,) = y_3 = 0.00518297, \qquad |x_3 - x_2| = |0.563\,838 - 0.612\,699| = 0.048\,861$
- $x_4 = 0.567170 \qquad |x_4 - x_3| = |0.567170 - 0.563\,838\,| = 0.003\,332$
- $x_5 = 0.567143 \qquad |x_5 - x_4| = |0.567143 - 0.567170| = 2.7 \times 10^{-5}$
- $x_6 = 0.567143 \qquad |x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567143| = 0$

O halde verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 0.567143$ dir.